

## 1 Bases

### Exercice 1 ★ Bases ? –

Les systèmes suivants forment-ils des bases de  $\mathbb{R}^3$  ?  $S_1 = \{(1, -1, 0), (2, -1, 2)\}$ ;  $S_2 = \{(1, -1, 0), (2, -1, 2), (1, 0, a)\}$  avec  $a$  réel (on discutera suivant la valeur de  $a$ );  $S_3 = \{(1, 0, 0), (a, b, 0), (c, d, e)\}$  avec  $a, b, c, d, e$  réels (on discutera suivant leur valeur);  $S_4 = \{(1, 1, 3), (3, 4, 5), (-2, 5, 7), (8, -1, 9)\}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[857]

### Exercice 2 ★ Base+coordonnées –

Montrer que les vecteurs  $u_1 = (0, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$  et  $u_3 = (1, 1, 0)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur  $u = (1, 1, 1)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[858]

### Exercice 3 ★ Base à paramètres –

1. Pour quelles valeurs du paramètre réel  $t$  la famille  $((1, t), (t, 3))$  est-elle une base de  $\mathbb{R}^2$  ?
2. Même question avec la famille  $((1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1))$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2970]

### Exercice 4 ★★ Complétion d'une base –

Pour  $E = \mathbb{R}^4$ , dire si les familles de vecteurs suivantes peuvent être complétées en une base de  $E$ . Si oui, le faire.

1.  $(u, v, w)$  avec  $u = (1, 2, -1, 0)$ ,  $v = (0, 1, -4, 1)$  et  $w = (2, 5, -6, 1)$ ;
2.  $(u, v, w)$  avec  $u = (1, 0, 2, 3)$ ,  $v = (0, 1, 2, 3)$  et  $w = (1, 2, 0, 3)$ ;
3.  $(u, v)$  avec  $u = (1, -1, 1, -1)$  et  $v = (1, 1, 1, 1)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[859]

### Exercice 5 ★★ Bases et coordonnées avec des polynômes –

Montrer que  $P_1(X) = (X - 1)^2$ ,  $P_2(X) = X^2$  et  $P_3(X) = (X + 1)^2$  forment une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et donner les coordonnées de  $X^2 + X + 1$  dans cette base.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2622]

### Exercice 6 ★ Bases de polynômes et coordonnées –

Soit  $P = X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 6X + 5$ .

1. Déterminer la multiplicité de la racine 1 de  $P$ .
2. En déduire une décomposition de  $P$  en un produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = ((X - 1)^4, (X - 1)^3, (X - 1)^2, X - 1, 1)$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_4[X]$ .
4. Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3006]

### Exercice 7 ★★ Polynômes de Bernstein –

Pour  $0 \leq k \leq n$ , on note  $P_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$ . Démontrer que la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  forme une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2478]

### Exercice 8 ★★★★★ Polynômes de Lagrange –

Soit  $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$  et soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des nombres complexes deux à deux distincts. On pose, pour  $k = 1, \dots, n$ ,

$$L_k = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (X - \alpha_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\alpha_k - \alpha_i)}.$$

Démontrer que  $(L_k)_{k=1, \dots, n}$  est une base de  $E$ . Déterminer les coordonnées d'un élément  $P \in E$  dans cette base.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[862]

## 2 Bases et sous-espaces vectoriels

### Exercice 9 ★ Bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ –

Donner une famille génératrice finie, puis une base, de chacun des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\} \quad G = \{(a, a + b, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2951]

### Exercice 10 ★ Bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ –

On se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^4$ .

1. On considère le sous-espace vectoriel  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$ . Donner une famille génératrice, puis une base de  $F$ .

2. On considère le sous-espace vectoriel  $G = \{(a, a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ . Donner une famille génératrice finie, puis une base de  $G$ .

3. Déterminer une famille génératrice finie, puis une base de  $F + G$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2952]

### Exercice 11 ★★ Base d'un sous-espace engendré par une famille de vecteurs –

Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel

$$F = \text{vect}((1, 2, -1, 1), (-3, -2, 3, 2), (-1, 0, 1, 1), (2, 3, -2, 1)).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2968]

### Exercice 12 ★ Base de l'intersection - tous les cas possibles ! –

Déterminer une base de  $F \cap G$  dans les cas suivants :

1.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ,  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y - z = 0\}$ .

2.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ,  $G = \text{vect}(v_1, v_2)$  avec  $v_1 = (1, 1, -3)$  et  $v_2 = (1, 0, 1)$ .

3.  $F = \text{vect}(u_1, u_2)$ ,  $G = \text{vect}(v_1, v_2)$  avec  $u_1 = (1, -1, 0)$ ,  $u_2 = (2, -3, 1)$ ,  $v_1 = (1, 1, -3)$  et  $v_2 = (1, 0, 1)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2953]

### Exercice 13 ★ Base de la somme - tous les cas possibles –

Dans chaque cas, déterminer une base et la dimension de  $F + G$ .

1.  $F = \text{vect}(v_1, v_2)$  et  $G = \text{vect}(v_3, v_4)$  où  $v_1 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $v_2 = (2, 1, -1, 1)$ ,  $v_3 = (1, 1, -2, 0)$ ,  $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ ;

2.  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$  et  $G = \{(a + 2b, a - b, a + 2b, a + 2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ;

3.  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + 4t = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 3y + 5z + 7t = 0 \text{ et } x + y - z - t = 0\}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3101]

---

**Exercice 14** ★★ **Base dans un espace de matrices –**

Donner une famille génératrice finie, puis une base, de chacun des sous-espaces vectoriels de  $M_2(\mathbb{R})$  ci-dessous :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x+2y+z=0 \text{ et } y+z-2t=0 \right\}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2950]

---

**Exercice 15** ★★ **Base d'un sous-espace de polynômes –**

Soit  $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(\alpha) = 0\}$ . Démontrer que  $\mathcal{B} = \{(X - \alpha)X^k; 0 \leq k \leq n-1\}$  est une base de  $F$ . Quelle est la dimension de  $F$ ? Donner les coordonnées de  $(X - \alpha)^n$  dans cette base.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[861]

---

**Exercice 16** ★★ **Suites arithmétiques –**

Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[896]

---

**Exercice 17** ★★★ **Avec des polynômes –**

Soit  $E = \mathbb{R}_4[X]$  et  $a, b$  deux réels distincts. On désigne par  $F$  l'ensemble des polynômes de  $E$  dont  $a$  et  $b$  sont racines. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . En donner une base.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[870]

---

**Exercice 18** ★★★ **Base d'un sous-espace vectoriel de fonctions continues –**

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[-1, 1]$  qui sont affines sur  $[-1, 0]$  et sur  $[0, 1]$ . Démontrer que  $E$  est un espace vectoriel et en donner une base.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[860]

### 3 Bases et théorie de la dimension

---

**Exercice 19** ★ **Bases de sous-espaces vectoriels - 1 –**

Soient  $F$  et  $G$  les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

1. Donner une base de  $F$ , une base de  $G$ , en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de  $F \cap G$ , et donner sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de  $F$  et des vecteurs de la base de  $G$  trouvées en 1 est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ . Est-elle libre?
4. Les espaces  $F$  et  $G$  sont-ils supplémentaires?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[863]

---

**Exercice 20** ★ **Base de sevs - 2 –**

---

Soient  $F$  et  $G$  les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$  définis par

$$\begin{aligned} F &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; b - 2c + d = 0\} \\ G &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; a = d \text{ et } b = 2c\}. \end{aligned}$$

Donner une base de  $F$ , de  $G$  et de  $F \cap G$ . En déduire que  $F + G = \mathbb{R}^4$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[864]

---

### Exercice 21 ★ Base de sevs - 3 –

Soient  $F$  et  $G$  les sous-espaces vectoriels suivants de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - 2z = 0\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y = x + z\}. \end{aligned}$$

1. Déterminer la dimension de  $F$ , puis la dimension de  $G$ .
2. Calculer  $F \cap G$ . En déduire que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[865]

---

### Exercice 22 ★ Inclusion de sous-espaces vectoriels –

Soient

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0\} \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0\} \\ H &= \text{vect}((-3, 1, 1, 1), (6, 2, -1, -2), (3, 11, 2, -1)) \end{aligned}$$

1. Donner une base de  $F \cap G$ , puis sa dimension.
2. Montrer que  $H \subset F \cap G$ .
3. En déduire que  $H = F \cap G$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2955]

---

### Exercice 23 ★★ Sous-espaces engendrés dans $\mathbb{R}^3$ –

On considère, dans  $\mathbb{R}^3$ , les vecteurs :

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (2, 1, -1), \quad v_3 = (1, 2, 1), \quad v_4 = (1, 1, -2), \quad v_5 = (0, 1, 3).$$

Soit  $F$  l'espace vectoriel engendré par  $v_1, v_2$  et soit  $G$  celui engendré par  $v_3, v_4, v_5$ . Calculer les dimensions respectives de  $F$ ,  $G$ ,  $F + G$  puis  $F \cap G$  et donner une base de chacun de ces espaces.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2969]

---

### Exercice 24 ★ Sont-ils supplémentaires ? –

Soient  $F, G$  les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  suivants :

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Sont-ils supplémentaires ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[891]

---

### Exercice 25 ★★ Supplémentaire dans $\mathbb{R}_3[X]$ –

Soit  $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$ . Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3102]

### Exercice 26 ★★ Supplémentaire et décomposition en somme directe –

Dans  $E = \mathbb{R}^4$ , on considère les sous-espaces vectoriels  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$  et  $G = \{(2a, -a, 0, a), \text{ avec } a \in \mathbb{R}\}$ . Le but de l'exercice est de démontrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

1. Démontrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe.
2. Déterminer la dimension de  $F$  et celle de  $G$ .
3. En déduire que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.
4. Trouver l'unique couple  $(u_F, u_G) \in F \times G$  tel que  $(1, 2, 3, 4) = u_F + u_G$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3099]

### Exercice 27 ★★★ Décomposition dans une somme directe –

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 2y - z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de  $F$  et une base de  $G$ .
2. Démontrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires, puis décomposer un élément  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  dans  $F \oplus G$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2623]

### Exercice 28 ★ Exercice de synthèse –

On considère dans  $\mathbb{R}^4$  :

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1, 3, -2, 2) & v_2 = (2, 7, -5, 6) & v_3 = (1, 2, -1, 0) \\ w_1 = (1, 3, 0, 2) & w_2 = (2, 7, -3, 6) & w_3 = (1, 1, 6, -2). \end{array}$$

Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par  $(v_1, v_2, v_3)$  et  $G$  celui engendré par  $(w_1, w_2, w_3)$ .

1. Montrer que  $v_3$  est une combinaison linéaire de  $v_1$  et  $v_2$ . En déduire une base de  $F$ .
2. Montrer que  $w_3$  est une combinaison linéaire de  $w_1$  et  $w_2$ . En déduire une base de  $G$ .
3. Montrer que  $(v_1, v_2, w_1, w_2)$  est liée. En déduire une base de  $F + G$ .
4. Soit  $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$ . Donner une base de  $E$ .
5. Montrer que  $F + G = E$ . La somme est-elle directe ? Quelle est la dimension de  $F \cap G$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[868]

### Exercice 29 ★ Exercice de synthèse –

On considère la partie  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de  $F$ .
2. Compléter la base trouvée en une base de  $\mathbb{R}^4$ .
3. On pose  $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 2, 3, 4)$  et  $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$ . La famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est-elle libre ?
4. On pose  $G$  l'espace vectoriel engendré par les vecteurs  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Quelle est la dimension de  $G$  ?
5. Donner une base de  $F \cap G$ .
6. En déduire que  $F + G = \mathbb{R}^4$ .
7. Est-ce qu'un vecteur de  $\mathbb{R}^4$  s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[869]

### Exercice 30 ★ Exercice de synthèse –

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les 3 vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, 1, 2) \text{ et } v_3 = (1, 2, 3).$$

1. La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est-elle libre ?
2. On pose  $F = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ . Déterminer une base de  $F$  et sa dimension.
3. Déterminer trois réels  $a, b, c$  tels que l'on ait

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}.$$

4. Déterminer un vecteur  $w$  tel que  $(v_1, v_2, w)$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ .
5. Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
6. On considère  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y + 2z = 0\}$ . Déterminer une base de  $G$ . Quelle est sa dimension ?
7. Déterminer une base de  $F \cap G$ . Quelle est sa dimension ?
8.  $F$  et  $G$  sont-ils en somme directe ?
9. Sans chercher à déterminer une base de  $F + G$ , donner la dimension de  $F + G$ .
10. En déduire que  $F + G = \mathbb{R}^3$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2954]

## 4 Exercices plus théoriques sur la notion de dimension

### Exercice 31 ★ Pour bien démarrer... –

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^5$  de dimension 3. Montrer que  $F \cap G \neq \{0\}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[894]

### Exercice 32 ★★ Autour du théorème des quatre dimensions –

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sevs de  $E$ . Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

1.  $F \cap G = \{0\}$  ;
2.  $F + G = E$  ;
3.  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[895]

### Exercice 33 ★★★★★ Une caractérisation de la dimension –

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  et soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Soit  $d : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$  vérifiant les propriétés suivantes :

Si  $F, F' \in \mathcal{S}$  sont tels que  $F \cap F' = \{0\}$ , alors  $d(F + F') = d(F) + d(F')$  ;  $d(E) = n$ .

1. Soient  $F, G \in \mathcal{S}$  avec  $\dim(F) = \dim(G) = 1$ . Démontrer que  $d(F) = d(G)$ .
2. En déduire que, pour tout  $F \in \mathcal{S}$ ,  $d(F) = \dim(F)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[897]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

On peut écarter facilement  $S_1$  et  $S_4$ . Pour les deux autres familles qui comprennent trois éléments, il suffit de vérifier que la famille est libre. On fait comme d'habitude...

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Prouver que la famille est libre. Puis résoudre  $(1, 1, 1) = au_1 + bu_2 + cu_3$ .

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Étudier si la famille est libre en échelonnant un système...

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

Par le théorème de la base incomplète, c'est possible si et seulement si la famille de vecteurs est libre, ce qu'on doit d'abord vérifier. Si c'est le cas, on peut la compléter avec des vecteurs de la base canonique.

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Commencer par démontrer que c'est une famille libre en écrivant une relation de liaison  $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$ , puis déterminer un système vérifié par  $a$ ,  $b$  et  $c$  en identifiant les coefficients degré par degré.

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

1. Calculer  $P(1)$ ,  $P'(1)$ , ....
  2. Factoriser !
  3. Reasonner sur le degré.
  4. Commencer par calculer les coordonnées de  $X$  et de  $X^2$  dans cette base.
- 

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

Le terme de plus bas degré de chaque  $P_k$  est  $X^k$ . Dans une relation de liaison  $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0$ , commencer par prouver que  $\lambda_0 = 0$ .

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

Le point clé est de constater que  $L_k(\alpha_i) = 1$  si  $i = k$ , 0 sinon.

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

1. Résoudre le système.
  2.  $G$  apparaît facilement comme un sous-espace engendré.
  3. Réunir une famille génératrice de  $F$  et une famille génératrice de  $G$ .
- 

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

Commencer par étudier la liberté de cette famille.

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

---

Commencer par déterminer une famille génératrice en utilisant la propriété  $\text{vect}(u_1, \dots, u_p) + \text{vect}(v_1, \dots, v_q) = \text{vect}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ . On pourra chercher une base de  $F$  et une base de  $G$ .

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

---

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

---

Factoriser un élément de  $F$  par  $X - \alpha$  !

---

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

---

Combien faut-il de paramètres pour connaître parfaitement une suite arithmétique ?

---

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

---

Tout polynôme de  $F$  s'écrit  $P = (X - a)(X - b)Q$  avec  $\deg(Q) \leq 2$ .

---

**Indication pour l'exercice 18 ▲**

---

Prendre  $f$  dans  $E$ . Combien faut-il de paramètres pour exprimer  $f$  ? En déduire une base.

---

**Indication pour l'exercice 19 ▲**

---

1. Il faut d'abord trouver une famille génératrice de chaque espace par le procédé "habituel". On montrera ensuite que la famille est libre.
  2. Idem.
  3. Résoudre un système, ou démontrer que  $F + G = \mathbb{R}^3$  à l'aide d'arguments de dimension.
  4. Que vaut  $F \cap G$  ?
- 

**Indication pour l'exercice 20 ▲**

---

Pour le en déduire, utiliser la relation

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

---

**Indication pour l'exercice 21 ▲**

---

1. Trouver une base.
  2.  $F \cap G = \{0\}$ , puis lien entre  $\dim(F + G)$  et  $\dim(F)$ ,  $\dim(G)$  et  $\dim(F \cap G)$ .
- 

**Indication pour l'exercice 22 ▲**

---

1. Exprimer deux coordonnées en fonctions des deux autres.
  2. Il suffit de vérifier que les vecteurs qui engendrent  $H$  sont dans  $F \cap G$ .
  3. Commencer par prouver que  $\dim(H) = 2$  en prouvant que  $\dim(H) \leq 2$  puis que  $\dim(H) \geq 2$ .
- 

**Indication pour l'exercice 23 ▲**

---

**Indication pour l'exercice 24 ▲**

---

La réunion d'une base de  $F$  et d'une base de  $G$  est-elle une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

---

**Indication pour l'exercice 25 ▲**

---



Commencer par chercher une base de  $F$ , puis compléter cette base en une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

---

**Indication pour l'exercice 26 ▲**

---

1. Écrire ce que signifie que  $u \in F \cap G$ .
  2. Trouver une base de  $F$  et une base de  $G$ . Pour ce dernier, c'est immédiat...
  3. Appliquer le théorème des 4 dimensions.
  4. Faire un raisonnement par analyse/synthèse.
- 

**Indication pour l'exercice 27 ▲**

---

- 1.
  - 2.
- 

**Indication pour l'exercice 28 ▲**

---

1.  $F$  est engendré par  $v_1$  et  $v_2$ .
  2.  $G$  est engendré par  $w_1$  et  $w_2$ .
  3.  $v_1 - w_1 = v_2 - w_2$
  - 4.
  5. Puisque  $E$  et  $F + G$  ont la même dimension il suffit de prouver que  $F + G \subset E$ , soit encore que  $v_1, v_2$  et  $w_1$  sont éléments de  $E$ .
- 

**Indication pour l'exercice 29 ▲**

---

- 1.
  2. Utiliser des vecteurs de la base canonique.
  - 3.
  - 4.
  - 5.
  - 6.
  - 7.
- 

**Indication pour l'exercice 30 ▲**

---

1. On peut exprimer  $v_3$  en fonction de  $v_1$  et de  $v_2$ .
  2. On peut retirer  $v_3$  de  $\text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ ...
  3. Écrire  $(x, y, z) = av_1 + bv_2$  et résoudre le système d'inconnues  $a$  et  $b$ . La condition de compatibilité donne le résultat.
  4. Choisir un vecteur de la base canonique.
  5. Utiliser le résultat précédent.
  6. Exprimer une des coordonnées en fonction des autres.
  7. Résoudre le système.
  8. C'est du cours !
  9. Théorème des 4 dimensions.
  10. Que dire de deux sous-espaces vectoriels dont l'un est inclus dans l'autre et qui ont la même dimension ?
- 

**Indication pour l'exercice 31 ▲**

---

Si c'était le cas, quelle serait la dimension de  $F + G$  ?

---

**Indication pour l'exercice 32 ▲**

---

Tout repose sur la formule  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ .

---

**Indication pour l'exercice 33 ▲**

---

1. Soit  $F = \mathbb{K}f$  et  $G = \mathbb{K}g$ . Écrire  $F + G = \mathbb{K}f + \mathbb{K}(f + g) = \mathbb{K}g + \mathbb{K}(f + g)$ .
  2. Raisonner par récurrence sur  $\dim(F)$ .
-

### Correction de l'exercice 1 ▲

$S_1$  est une famille à deux éléments dans un espace de dimension 3. Ce n'est pas une base de  $\mathbb{R}^3$ . De même,  $S_4$  qui comporte quatre éléments ne peut pas être une base de  $\mathbb{R}^3$ . Pour  $S_2$  et  $S_3$ , comme ce sont des familles à 3 éléments dans un espace de dimension 3, il suffit de savoir si ce sont des familles libres ou non. Résolvons d'abord l'équation

$$\lambda_1(1, -1, 0) + \lambda_2(2, -1, 2) + \lambda_3(1, 0, a) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + a\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système est successivement équivalent à

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad L_2 + L_1 \rightarrow L_2 \\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (a-2)\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3. \end{aligned}$$

Si  $a \neq 2$ , on obtient  $\lambda_3 = 0$  et en remontant les calculs  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . La famille est donc libre. Si  $a = 2$ , alors le choix  $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = -1$  et  $\lambda_1 = 1$  donne une solution au système. La famille n'est alors pas libre. On conclut que  $S_2$  est une base si et seulement si  $a \neq 2$ . Étudions maintenant  $S_3$ , en résolvant l'équation

$$\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(a, b, 0) + \lambda_3(c, d, e) = 0$$

qui est équivalente au système

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_2 + c\lambda_3 = 0 \\ b\lambda_2 + d\lambda_3 = 0 \\ e\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Si  $e \neq 0$ , on obtient  $\lambda_3 = 0$ . Si de plus  $b \neq 0$ , on obtient  $\lambda_2 = 0$  puis  $\lambda_1 = 0$  : la famille est libre. D'autre part, si  $b = 0$ , le deuxième vecteur est proportionnel au premier et la famille est liée. Enfin, si  $e = 0$ , toute combinaison linéaire des trois vecteurs est telle que la troisième coordonnée est nulle : la famille n'est pas génératrice. Ainsi,  $(S_3)$  est une base si et seulement si  $e \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

Puisque  $(u_1, u_2, u_3)$  est une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, à savoir  $\mathbb{R}^3$ , il suffit de prouver qu'elle est libre. L'équation  $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$  est équivalente successivement aux systèmes :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} b+c = 0 \\ a+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b+c = 0 \\ a+c = 0 \\ a-c = 0 \end{cases} \quad (L3) - (L1) \rightarrow (L3) \\ \iff & \begin{cases} b+c = 0 \\ a+c = 0 \\ 2a = 0 \end{cases} \quad (L3) + (L2) \rightarrow (L3) \iff a = b = c = 0. \end{aligned}$$

La famille est libre. Pour trouver les coordonnées du vecteur  $(1, 1, 1)$ , on doit maintenant résoudre l'équation  $(1, 1, 1) = au_1 + bu_2 + cu_3$ , qui est successivement équivalente à

$$\begin{aligned} & \begin{cases} b+c = 1 \\ a+c = 1 \\ a+b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b+c = 1 \\ a+c = 1 \\ a-c = 0 \end{cases} \quad (L3) - (L1) \rightarrow (L3) \\ \iff & \begin{cases} b+c = 1 \\ a+c = 1 \\ 2a = 1 \end{cases} \quad (L3) + (L2) \rightarrow (L3) \iff a = b = c = 1/2. \end{aligned}$$

On a donc  $(1, 1, 1) = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3$ . On aurait pu aller un peu plus vite en remarquant que, par symétrie des trois coordonnées, on savait que  $a = b = c$ .

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. Puisqu'on a affaire à une famille de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , il suffit de déterminer si cette famille est libre. Soit  $a, b$  deux réels tels que  $a(1, t) + b(t, 3) = 0$ . On en déduit le système suivant, sur  $a, b$  :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ t & 3 & 0 \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ 0 & 3-t^2 & 0 \end{array} \right).$$

Ce système échelonné admet une solution non nulle si et seulement si  $3 - t^2 = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $t = \sqrt{3}$  ou  $t = -\sqrt{3}$ . Ainsi, la famille est une base si et seulement si  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ .

2. Puisqu'on a affaire à une famille de trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , il suffit de déterminer si cette famille est libre. Soit  $a, b, c$  trois réels tels que  $a(1, 0, t) + b(1, 1, t) + c(t, 0, 1) = 0$ . On obtient le système suivant :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & t & 1 & 0 \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t^2 & 0 \end{array} \right).$$

Ce système échelonné admet une solution non nulle si et seulement si  $1 - t^2 = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $t = 1$  ou  $t = -1$ . Ainsi, la famille est une base si et seulement si  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. On remarque que  $w = 2u + v$ . La famille  $(u, v, w)$  est liée. On ne peut pas la compléter en une base de  $E$ .

2. On va d'abord vérifier que la famille  $(u, v, w)$  est libre. Une équation du type  $au + bv + cw = 0$  est équivalente au système

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

La première et la dernière équation donnent immédiatement  $b = 0$ , d'où on tire  $a = 0$  et  $c = 0$ . La famille  $(u, v, w)$  est libre. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de  $\mathbb{R}^4$  à l'aide de vecteurs de n'importe quelle famille génératrice de  $\mathbb{R}^4$ . Ici, il suffit d'un vecteur (la famille compte déjà 3 éléments, et on travaille dans un espace de dimension 4), et on va choisir la famille génératrice la plus simple, la base canonique notée  $(e_1, \dots, e_4)$ . Montrons que  $(u, v, w, e_2)$  est libre. En effet, si  $au + bv + cw + de_2 = 0$ , on obtient le système

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + 2c + d = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

Comme précédemment, la première et la dernière équation donnent  $b = 0$ , d'où  $a = 0$  d'après la deuxième, puis  $c = 0$  et  $d = 0$ . La famille  $(u, v, w, e_2)$  est donc une famille libre de 4 éléments dans un espace de dimension 4. C'est une base de  $\mathbb{R}^4$ . Remarquons que le choix de  $e_2$  n'est pas fait au hasard : on l'a choisi plutôt que  $e_1$  afin de ne pas perturber la première et la dernière équation du système, et donc d'obtenir facilement  $b = 0$ .

3. Les vecteurs  $(u, v)$  sont non proportionnels. La famille  $(u, v)$  est donc libre et comme ci-dessus on peut la compléter à l'aide de deux (cette fois) vecteurs de la base canonique. On vérifie d'abord que  $(u, v, e_1)$  est libre. En effet, si  $au + bv + ce_1 = 0$ , on trouve le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + b = 0 \\ a + b = 0 \\ -a + b = 0. \end{cases}$$

De la première et la troisième équation, on trouve  $c = 0$ , d'où l'on tire facilement  $a = b = c = 0$ . Expliquons maintenant le choix du deuxième vecteur pour compléter. La deuxième et la quatrième équation sont identiques. Elles apportent donc la même information. Pour obtenir vraiment un système de quatre équations différentes, il suffit de perturber l'une des deux, par exemple la deuxième. C'est pourquoi on va montrer que  $(u, v, e_1, e_2)$  est une famille libre. En effet, si  $au + bv + ce_1 + de_2 = 0$ , alors on trouve le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + b + d = 0 \\ a + b = 0 \\ -a + b = 0. \end{cases}$$

Comme précédemment, on a  $c = 0$ , et les deuxième et quatrième équations montrent que  $d = 0$ . On en déduit alors facilement que  $a = b = c = d = 0$ . La famille  $(u, v, e_1, e_2)$  est libre. Elle comporte 4 éléments dans un espace de dimension 4 : c'est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

On commence par démontrer que  $(P_1, P_2, P_3)$  est une famille libre : soient  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$ , c'est-à-dire, en développant,  $(a + b + c)X^2 + (-2a + 2c)X + (a + c) = 0$ . Puisqu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a + 2c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

dont on démontre facilement que la seule solution est  $a = b = c = 0$ . Ainsi,  $(P_1, P_2, P_3)$  est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 : c'est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Cherchons ensuite les coordonnées de  $X^2 + X + 1$  en écrivant  $X^2 + X + 1 = aP_1 + bP_2 + cP_3$ . Toujours en développant et en identifiant, on obtient maintenant le système

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -2a + 2c = 1 \\ a + c = 1 \end{cases}$$

dont la seule solution est  $a = 1/4, b = 0$  et  $c = 3/4$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. On a  $P(1) = 0$ , puis  $P'(X) = 4X^3 + 6X^2 - 4X - 6$  et  $P'(1) = 0$ , puis encore  $P''(X) = 12X^2 + 12X - 4$  et  $P''(1) = 20 \neq 0$ . Ainsi, 1 est racine double (i.e. de multiplicité 2) de  $P$ .

2. D'après la question précédente,  $P$  est divisible par  $(X - 1)^2$ . On détermine le quotient à l'aide par exemple d'une division euclidienne. On en déduit que l'on a

$$P = (X - 1)^2(X^2 + 4X + 5). \quad (1)$$

Le polynôme  $X^2 + 4X + 5$  est de degré 2 et n'admet pas de racine réelle puisque son discriminant vaut  $-4$  et est donc strictement négatif. Il est donc irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ . Ainsi  $P = (X - 1)^2(X^2 + 4X + 5)$  est une décomposition de  $P$  en un produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

3. Comme  $\mathcal{B}$  a cinq éléments dans l'espace  $\mathbb{R}_4[X]$  qui est de dimension 5, il suffit de montrer que la famille  $\mathcal{B}$  est libre. Soient  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  des nombres réels tels que

$$\lambda_4(X - 1)^4 + \lambda_3(X - 1)^3 + \lambda_2(X - 1)^2 + \lambda_1(X - 1) + \lambda_0 = 0.$$

En identifiant les coefficients des monômes de degré 4, il vient  $\lambda_4 = 0$ , puis avec les coefficients des monômes de degré 3, il vient  $\lambda_3 = 0$  et ainsi de suite, on obtient  $\lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$ . D'où le résultat. Plus généralement, une famille de polynômes dont les degrés sont tous distincts est toujours une famille libre.

4. D'après la question 2, on a

$$\begin{aligned}P &= (X-1)^2(X^2+4X+5) \\&= (X-1)^2((X-1+1)^2+4(X-1)+9) \\&= (X-1)^2((X-1)^2+6(X-1)+10) \\&= (X-1)^4+6(X-1)^3+10(X-1)^2\end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients de  $P$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(1, 6, 10, 0, 0)$ .

---

#### Correction de l'exercice 7 ▲

Remarquons d'abord que la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une famille de  $n+1$  vecteurs dans un espace de dimension  $n+1$ . Elle forme donc une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  si et seulement si elle est libre. D'autre part, le point clé est que le terme de plus bas degré de  $P_k$  est  $X^k$  (il n'y a pas de termes en  $X^{k-1}$ , etc...). Procédons par l'absurde et supposons que la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est liée. Soit  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  des réels, non tous nuls, tels que  $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0$ . Soit  $k$  le plus petit entier tel que  $\lambda_k \neq 0$ . Alors, le terme de degré  $k$  de  $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n$  est  $\lambda_k X^k$ . Il doit être nul, et donc  $\lambda_k$  doit être égal à 0, ce qui est une contradiction. Donc la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est libre : c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

---

#### Correction de l'exercice 8 ▲

Le point clé est de constater que  $L_k(\alpha_i) = 1$  si  $i = k$ , 0 sinon. Supposons alors que

$$a_1 L_1 + \dots + a_n L_n = 0.$$

Si on évalue cette égalité en  $\alpha_k$ , on trouve  $a_k = 0$ . La famille est libre. C'est une famille de  $n$  vecteurs dans un espace de dimension  $n$ , donc c'est une base de  $E$ . De plus, prenons  $P \in E$ , et cherchons  $a_1, \dots, a_n$  tels que

$$P = a_1 L_1 + \dots + a_n L_n.$$

La méthode est identique : on évalue en  $\alpha_k$  et on trouve

$$P(\alpha_k) = a_k.$$

Ainsi, on a prouvé que pour tout  $P \in E$ , on a

$$P(X) = \sum_{k=1}^n P(\alpha_k) L_k.$$

---

#### Correction de l'exercice 9 ▲

On a

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in F &\iff x = 2y - z \\&\iff \begin{cases} x &= 2y - z \\ y &= y \\ z &= z \end{cases}\end{aligned}$$

En posant  $u_1 = (2, 1, 0)$  et  $u_2 = (-1, 0, 1)$ , on a donc

$$(x, y, z) \in F \iff (x, y, z) = y u_1 + z u_2.$$

$F = \text{vect}(u_1, u_2)$  et donc  $(u_1, u_2)$  est une famille génératrice de  $F$ . Puisque  $u_1$  et  $u_2$  ne sont pas colinéaires,  $(u_1, u_2)$  est aussi une famille libre et donc  $(u_1, u_2)$  est une base de  $F$ . D'autre part, nous pouvons réécrire  $G$  comme

$$\begin{aligned}G &= \{a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) : a, b \in \mathbb{R}\} \\&= \text{vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1)).\end{aligned}$$

En posant  $v_1 = (1, 1, 0)$  et  $v_2 = (0, 1, 1)$ , on a prouvé que  $(v_1, v_2)$  est une famille génératrice de  $G$ . Puisque de plus,  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas colinéaires,  $(v_1, v_2)$  est une base de  $G$ .

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. On écrit que

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = x \\ y = -x - z \\ z = z \\ t = x \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit qu'une famille génératrice de  $F$  est donnée par les vecteurs  $u_1 = (1, -1, 0, 1)$  et  $u_2 = (0, -1, 1, 0)$ . Ces vecteurs étant linéairement indépendants, ils forment une base de  $F$ .

2. Posant  $u_3 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $(u_3)$  est une base de  $G$ .

3. Puisque  $F = \text{vect}(u_1, u_2)$  et que  $G = \text{vect}(u_3)$ , on a que  $F + G = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$  et donc  $(u_1, u_2, u_3)$  est une famille génératrice de  $F + G$ . On vérifie ensuite facilement que cette famille est libre. Donc c'est une base de  $F + G$ .

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

Posons  $v_1 = (1, 2, -1, 1)$ ,  $v_2 = (-3, -2, 3, 2)$ ,  $v_3 = (-1, 0, 1, 1)$ ,  $v_4 = (2, 3, -2, 1)$ . La famille  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  est une famille génératrice de  $F$ . Étudions si cette famille est libre. Soit  $a, b, c, d$  des réels tels que  $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$ . Alors  $a, b, c, d$  sont solutions du système

$$\begin{cases} a - 3b - c + 2d = 0 \\ 2a - 2b + 3d = 0 \\ -a + 3b + c - 2d = 0 \\ a + 2b + c + d = 0 \end{cases}$$

On va résoudre ce système en utilisant la méthode du pivot de Gauss. Pour cela, on écrit la matrice augmentée :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\iff \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ &\iff \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\iff \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\iff \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

On en déduit alors que le système est équivalent à

$$\begin{cases} a &= -3c \\ b &= 0 \\ c &= c \\ d &= 2c \end{cases}$$

Ainsi, le système admet des solutions non-nulles et la famille est liée. Par exemple, pour  $c = 1$ , on a

$$-3v_1 + v_3 + 2v_4 = 0 \iff v_3 = 3v_1 - 2v_4.$$

Ainsi,  $v_3$  est combinaison linéaire de  $v_1$  et de  $v_4$ , et on peut écrire que

$$F = \text{vect}(v_1, v_2, v_4).$$

Il reste à vérifier que la famille  $(v_1, v_2, v_4)$  est libre. On peut reprendre la même méthode, ou utiliser les calculs déjà effectués. En effet, si  $x, y, z$  sont des réels tels que  $xv_1 + yv_2 + zv_4 = 0$ , alors on a aussi

$$xv_1 + yv_2 + 0v_3 + zv_4 = 0.$$

Mais utilisant ce qu'on a fait auparavant, ceci entraîne qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} x &= -3c \\ y &= 0 \\ 0 &= c \\ z &= 2c \end{cases}$$

Ceci entraîne  $x = y = z = 0$ . La famille est donc libre et  $(v_1, v_2, v_4)$  est une base de  $F$ . En particulier,  $\dim(F) = 3$ .

---

### Correction de l'exercice 12 ▲

1. On écrit que

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F \cap G &\iff \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ -x + y - z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2y &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= 0 \\ z &= z \end{cases} \end{aligned}$$

Le vecteur  $w = (-1, 0, 1)$  engendre donc  $F \cap G$  et comme il est non nul, c'est une famille libre. Donc  $(w)$  est une base de  $F \cap G$ .

2. Soit  $(x, y, z) \in F \cap G$ . Alors on sait que  $x + y + z = 0$ . D'autre part, on sait qu'il existe  $a, b$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $(x, y, z) = a(1, 1, -3) + b(1, 0, 1)$ . On en déduit que

$$\begin{cases} x &= a + b \\ y &= a \\ z &= -3a + b \end{cases}$$

Maintenant, on remplace  $x, y$  et  $z$  par leur valeur dans  $x + y + z = 0$ . On trouve

$$(a + b) + a + (-3a + b) = 0$$

ce qui est équivalent à

$$-a + 2b = 0 \iff a = 2b.$$



Ainsi,  $(x, y, z) \in F \cap G$  si et seulement s'il existe un réel  $b$  tel que

$$(x, y, z) = 2b(1, 1, -3) + b(1, 0, 1) = (3b, 2b, -5b) = b(3, 2, -5).$$

Le vecteur  $w = (3, 2, -5)$  engendre  $F \cap G$ . Comme  $(w)$  est libre, c'est une base de  $F \cap G$ .

3. Méthode 1 : Soit  $(x, y, z) \in F \cap G$ . Alors, il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que

$$(x, y, z) = au_1 + bu_2$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x &= a + 2b \\ y &= -a - 3b \\ z &= b \end{cases}$$

D'autre part, il existe des réels  $c$  et  $d$  tels que

$$(x, y, z) = cv_1 + dv_2$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x &= c + d \\ y &= c \\ z &= -3c + d \end{cases}$$

Ceci nous amène à résoudre le système de 3 équations et 4 inconnues

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + 2b &= c + d \\ -a - 3b &= c \\ b &= -3c + d \end{cases} &\iff \begin{cases} a + 2b - c - d &= 0 \\ -a - 3b - c &= 0 \\ b + 3c - d &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + 2b - c - d &= 0 \\ -b - 2c - d &= 0 \\ b + 3c - d &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + 2b - c - d &= 0 \\ -b - 2c - d &= 0 \\ c - 2d &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 13d \\ b &= -5d \\ c &= 2d \\ d &= d \end{cases} \end{aligned}$$

Les vecteurs de  $F \cap G$  sont donc les vecteurs qui s'écrivent

$$2d(1, 1, -3) + d(1, 0, 1) = d(3, 2, -5).$$

Si on pose  $w = (3, 2, -5)$ , on en déduit que  $(w)$  est une base de  $F \cap G$ . Méthode 2 : on commence par déterminer une équation de  $F$ . Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x &= a + 2b \\ y &= -a - 3b \\ z &= b \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x &= -y - z \\ a &= -y - 3b = -y - 3z \\ b &= z \end{cases} \\ &\iff x + y + z = 0. \end{aligned}$$

On est alors ramené à la question 2.

1. On sait que  $F + G = \text{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , donc  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  est une famille génératrice de  $F + G$ . Ce n'est pas une famille libre car  $v_3 = v_2 - v_1$ . La famille  $(v_1, v_2, v_4)$  est une famille génératrice de  $F + G$ . Il est très facile de vérifier qu'elle est libre. C'est donc une base de  $F + G$  qui est de dimension 3.

2. On commence par chercher une base de  $F$  :

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = t \\ y = -t - z \\ z = z \\ t = t \end{cases}\end{aligned}$$

En posant  $u_1 = (1, -1, 0, 1)$  et  $u_2 = (0, -1, 1, 0)$ , la famille  $(u_1, u_2)$  est une famille génératrice (et même une base) de  $F$ . D'autre part,

$$\begin{aligned}G &= \{(a + 2b, a - b, a + 2b, a + 2b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 1, 1, 1) + b(2, -1, 2, 2) : a, b \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

En posant  $v_1 = (1, 1, 1, 1)$  et  $v_2 = (2, -1, 2, 2)$ , la famille  $(v_1, v_2)$  est une famille génératrice de  $G$ . La famille  $(u_1, u_2, v_1, v_2)$  est une famille génératrice de  $F + G$ , mais ce n'est pas une famille libre car  $v_2 = u_1 + u_2 + v_1$ . On sait donc aussi que la famille  $(u_1, u_2, v_1)$  est une famille génératrice de  $F + G$ . Elle est libre et donc  $(u_1, u_2, v_1)$  est une base de  $F + G$  qui est donc de dimension 3.

3. On procède de la même façon en commençant par chercher une base de  $F$  :

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z - 2t \\ y = -2z - 3t \\ z = z \\ t = t \end{cases}\end{aligned}$$

En posant  $u_1 = (1, -2, 1, 0)$  et  $u_2 = (2, -3, 0, 1)$ , la famille  $(u_1, u_2)$  est une famille génératrice (et même une base) de  $F$ . Concernant  $G$ , on écrit

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in G &\iff \begin{cases} x + 3y + 5z + 7t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 3y + 5z + 7t = 0 \\ -2y - 6z - 8t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -4z - 5t \\ y = -3z - 4t \\ z = z \\ t = t \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, en posant  $v_1 = (4, -3, 1, 0)$  et  $v_2 = (5, -4, 0, 1)$ ,  $(v_1, v_2)$  est une base de  $G$ . On a donc  $(u_1, u_2, v_1, v_2)$  qui est une famille génératrice de  $F + G$ . Cette famille n'est pas libre, car  $v_1 = u_1 - u_2 + v_2$ , donc  $(u_1, u_2, v_2)$  est une famille génératrice de  $F + G$ . On vérifie aussi que cette famille est libre. C'est une base de  $F + G$  qui est de dimension 3.

Nous pouvons réécrire  $F$  comme

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

En posant  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , la famille  $(A_1, A_2)$  est une famille génératrice de  $F$ , et comme la famille  $(A_1, A_2)$  est clairement libre, c'est aussi une base de  $F$ . On commence par résoudre le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ y+z-2t &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+2y &= -z \\ y &= -z+2t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= z-4t \\ y &= -z+2t. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc démontré que

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} z-4t & -z+2t \\ z & t \end{pmatrix} \text{ avec } z, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

En notant  $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on a prouvé que  $(B_1, B_2)$  est une famille génératrice de  $G$ . Puisque c'est aussi clairement une famille libre, c'est une base de  $G$ .

---

### Correction de l'exercice 15 ▲

Soit  $P \in F$ . Alors, puisque  $P(\alpha) = 0$ ,  $P$  se factorise par  $X - \alpha$ . Autrement dit, il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que  $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ . Mais on peut écrire

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

et donc

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X - \alpha) X^k,$$

ce qui prouve que  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $F$ . C'est aussi une famille libre, car si

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k (X - \alpha) X^k = 0,$$

alors

$$(X - \alpha) \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right) = 0$$

et le polynôme  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  doit être nul. Comme la famille  $(1, X, \dots, X^{n-1})$  est libre, ceci entraîne que tous les  $a_k$  sont nuls. On en déduit bien sûr que la dimension de  $F$  est  $n$ . Cette dernière propriété pouvait également être

établi à l'aide du théorème du rang, car  $F$  est le noyau de la forme linéaire  $\mathbb{R}_n[X] \rightarrow R, P \mapsto P(\alpha)$ . Enfin, pour déterminer les coordonnées de  $(X - \alpha)^n$  dans la base précédente, on écrit

$$\begin{aligned}(X - \alpha)^n &= (X - \alpha)(X - \alpha)^{n-1} \\ &= (X - \alpha) \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-\alpha)^{n-1-k} X^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-\alpha)^{n-1-k} (X - \alpha) X^k\end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 16 ▲

Soit  $E$  l'ensemble des suites arithmétiques complexes. On vérifie sans difficulté que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites complexes, et donc que c'est un espace vectoriel. Pour calculer sa dimension, on remarque que l'on connaît parfaitement une suite arithmétique si l'on connaît son premier terme et sa raison. Ceci laisse à penser que la dimension de  $E$  est égale à deux. Prouvons-le. Si  $(u_n)$  est une suite arithmétique, alors son premier terme est  $u_0$  et sa raison est égale à  $u_1 - u_0$ . Considérons donc

$$\begin{aligned}\phi : E &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u_n) &\mapsto (u_0, u_1 - u_0)\end{aligned}$$

$\phi$  est clairement une application linéaire. Elle est injective : si  $\phi((u_n)) = 0$ , alors  $(u_n)$  est une suite arithmétique de premier terme nul et de raison nulle, et donc  $u_n = 0$  pour tout entier  $n$ . Elle est aussi surjective : si  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , alors la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = a + nb$  est élément de  $E$  et vérifie  $\phi((u_n)) = (a, b)$ . Autrement dit,  $\phi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre  $E$  et  $\mathbb{C}^2$ . Puisque  $\mathbb{C}^2$  est de dimension 2,  $E$  est aussi de dimension 2. Remarquons que l'on peut aussi trouver une base de  $E$ . Si  $(a_n)$  est la suite définie par  $a_n = 1$  pour tout entier  $n$ , et  $(b_n)$  est la suite définie par  $b_n = n$  pour tout entier  $n$ , alors ces deux suites sont éléments de  $E$  et forment une famille libre. De plus, si  $(u_n)$  est un élément de  $E$ , alors il existe  $(c, d) \in \mathbb{R}^2$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = c + nd = ca_n + db_n$ , et donc  $(u_n)$  est combinaison linéaire de  $(a_n)$  et  $(b_n)$ . Autrement dit,  $((a_n), (b_n))$  est une base de  $E$  qui est de dimension 2.

### Correction de l'exercice 17 ▲

Il est d'abord très facile de vérifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . De plus, prenons  $P \in F$ . Alors  $P$  s'écrit  $P(X) = (X - a)(X - b)Q(X)$ . Puisque  $P$  est de degré inférieur ou égal à 4,  $Q$  est de degré inférieur ou égal à 2, et donc  $Q(X) = uX^2 + vX + w$ . Développant, on trouve

$$P(X) = uX^2(X - a)(X - b) + vX(X - a)(X - b) + w(X - a)(X - b).$$

Autrement dit, la famille  $(X^2(X - a)(X - b), X(X - a)(X - b), (X - a)(X - b))$  est une famille génératrice de  $F$ . De plus, elle est libre puisque les polynômes qui la constituent ont tous des degrés différents. C'est donc une base de  $F$ .

### Correction de l'exercice 18 ▲

Il est facile de prouver que  $E$  est un sous-espace vectoriel des fonctions continues sur  $[-1, 1]$ . Pour trouver une base de  $E$ , partons de  $f \in E$ . Puisque  $f$  est affine sur  $[-1, 0]$ , il existe des constantes  $a$  et  $b$  telles que, pour tout  $x \in [-1, 0]$ , on a  $f(x) = ax + b$ . Puisque  $f$  est affine sur  $[0, 1]$ , il existe des constantes  $c$  et  $d$  telles que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $f(x) = cx + d$ . La continuité de  $f$  en 0 entraîne que  $b = d$ . Finalement, on a prouvé que  $f$  est élément de  $E$  si et seulement s'il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \in [-1, 0] \\ cx + b & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Ceci suggère que la dimension de  $E$  est 3. Encore faut-il trouver la base à partir de l'écriture précédente. Posons pour cela

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{et } f_3(x) = 1.$$

$f_1, f_2$  et  $f_3$  sont des éléments de  $E$ , et la discussion précédente montre que tout élément de  $E$  s'écrit  $af_1 + cf_2 + bf_3$ . Autrement dit,  $(f_1, f_2, f_3)$  est une famille génératrice de  $E$ . De plus,  $(f_1, f_2, f_3)$  est une famille libre. En effet, si  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ , l'évaluation en  $x = 0$  donne  $\lambda_3 = 0$ , puis celle en  $-1$  donne  $\lambda_1 = 0$  et enfin celle en  $1$  donne  $\lambda_2 = 0$ . On conclut finalement que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E$ .

---

### Correction de l'exercice 19 ▲

1. On trouve d'abord une famille génératrice de  $F$ . On a :

$$(x, y, z) \in F \iff x - 2y + z = 0 \iff \begin{cases} x = y \times 2 + z \times (-1) \\ y = y \times 1 + z \times 0 \\ z = y \times 0 + z \times 1. \end{cases}$$

Les vecteurs  $(2, 1, 0)$  et  $(-1, 0, 1)$  engendrent donc  $F$ . De plus, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, dont la famille est libre. C'est une base de  $F$  qui est de dimension 2. On procède de même pour  $G$  :

$$(x, y, z) \in G \iff 2x - y + 2z = 0 \iff \begin{cases} x = x \times 1 + z \times 0 \\ y = x \times 2 + z \times 2 \\ z = x \times 0 + z \times 1. \end{cases}$$

On trouve cette fois que  $((1, 2, 0), (0, 2, 1))$  est une base de  $G$  qui est de dimension 2.

2. C'est la même chose, mais cette fois on a deux équations.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F \cap G &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y = 0 \\ z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \times (-1) \\ y = z \times 0 \\ z = z \times 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur  $(-1, 0, 1)$  engendre  $F \cap G$ . Comme une famille constituée d'un vecteur non-nul est libre,  $(-1, 0, 1)$  est une base de  $F \cap G$  qui est de dimension 1.

3. Notons  $u = (2, 1, 0)$ ,  $v = (-1, 0, 1)$ ,  $w = (1, 2, 0)$  et  $t = (0, 2, 1)$ . Il s'agit de montrer que  $(u, v, w, t)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ . Méthode 1. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et essayons d'écrire  $(x, y, z) = au + bv + cw + dt$ . Alors on doit résoudre le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2a - b + c = x \\ a + 2c + 2d = y \\ b + d = z \end{cases} &\iff \begin{cases} 2a - b + c = x \\ b + 3c + 4d = 2y - x \\ b + d = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a - b + c = x \\ b + 3c + 4d = 2y - x \\ 3c + 3d = 2y - x - z. \end{cases} \end{aligned}$$

On voit donc qu'on peut imposer une valeur quelconque à  $d$ , puis, le système étant triangulaire, obtenir les valeurs de  $c$ ,  $b$  et enfin  $a$ . Méthode 2. L'espace vectoriel engendré par la réunion des deux bases est  $F + G$ . On doit démontrer que  $F + G = \mathbb{R}^3$ , et pour cela il suffit de démontrer que  $\dim(F + G) = 3$ . Par le théorème des quatre dimensions, on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

ce qu'il fallait démontrer. La famille  $(u, v, w, t)$  n'est pas libre car une famille libre de  $\mathbb{R}^3$  comporte au maximum trois éléments.

4.  $F$  et  $G$  ne sont pas supplémentaires car  $F \cap G \neq \{0\}$ .

---

### Correction de l'exercice 20 ▲

$F$  est donné par une équation. Il faut d'abord en trouver un système générateur. On a

$$(a, b, c, d) \in F \iff b - 2c + d = 0 \iff \begin{cases} a = a \times 1 \\ b = c \times 2 + d \times (-1) \\ c = c \times 1 \\ d = d \times 1 \end{cases}$$

La famille constituée par les vecteurs  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 1, 0)$  et  $(0, -1, 0, 1)$  est donc une famille génératrice de  $F$ . On vérifie aisément qu'elle est libre. C'est donc une base de  $F$ . Pour  $G$ , la situation est plus simple, car  $G$  est déjà donné sous la forme d'un espace vectoriel engendré. En effet, on a

$$(a, b, c, d) \in G \iff \begin{cases} a = d \times 1 \\ b = c \times 2 \\ c = c \times 1 \\ d = d \times 1 \end{cases}$$

La famille constituée par les vecteurs  $(1, 0, 0, 1)$  et  $(0, 2, 1, 0)$  est une famille génératrice de  $G$ . Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille est libre, et donc il s'agit d'une base de  $G$ . Pour  $F \cap G$ , on écrit

$$(a, b, c, d) \in F \cap G \iff \begin{cases} a = d \\ b = 2c \\ d = -b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0c \\ b = 2c \\ c = 1c \\ d = 0c \end{cases}$$

Le vecteur  $(0, 2, 1, 0)$  engendre  $F \cap G$ . C'est une base de  $F \cap G$  puisqu'il est non-nul. Enfin, par le théorème des quatre dimensions, on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Ainsi,  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de dimension 4 contenu dans  $\mathbb{R}^4$ , qui est lui-même de dimension 4.  $F + G = \mathbb{R}^4$ .

### Correction de l'exercice 21 ▲

1. On a

$$(x, y, z) \in F \iff x - y - 2z = 0 \iff \begin{cases} x = y + 2z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

La famille constituée par les vecteurs  $(1, 1, 0)$  et  $(2, 0, 1)$  est donc une famille génératrice de  $F$ . Comme elle est libre, c'est une base de  $F$  qui est de dimension 2. On cherche de même une base de  $G$  :

$$(x, y, z) \in G \iff x = 2y = x + z \iff \begin{cases} x = 2y \\ y = 1y \\ z = 0 \end{cases}$$

La famille constituée par le seul vecteur non-nul  $(2, 1, 0)$  engendre  $G$  et elle est évidemment libre. C'est une base de  $G$  et donc  $\dim(G) = 1$ .

2. On a

$$(x, y, z) \in F \cap G \iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x = 2y \\ z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0.$$

Ainsi,  $F \cap G = \{0\}$ . On en déduit que  $\dim(F \cap G) = 0$ . Il vient

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 1 - 0 = 3.$$

$F + G$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 3. On en déduit que  $F + G = \mathbb{R}^3$ . Puisque de plus  $F \cap G = \{0\}$ ,  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

---

**Correction de l'exercice 22 ▲**

---

1. On écrit que

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in F \cap G &\iff \begin{cases} 2x - y + 4z + 3t = 0 \\ y - 4z + 3t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -3t \\ y = 4z - 3t \\ z = z \\ t = t \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, en posant  $u_1 = (0, 4, 1, 0)$  et  $u_2 = (-3, -3, 0, 1)$ , on trouve que  $(u_1, u_2)$  est une famille génératrice de  $F \cap G$ . Puisque c'est une famille libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires), c'est une base de  $F \cap G$  qui est de dimension 2.

2. Il suffit de vérifier que les vecteurs qui engendrent  $H$  sont dans  $F \cap G$ . Par exemple, il suffit de vérifier que

$$2 \times (-3) - 1 + 4 + 3 = 0 \text{ et } 1 - 4 + 3 = 0$$

pour vérifier que  $(-3, 1, 1, 1) \in F \cap G$ . Il en est de même pour les deux autres vecteurs dont la vérification est laissée au lecteur.

3. On sait que

$$\text{vect}((-3, 1, 1, 1), (6, 2, -1, -2)) \subset H.$$

Puisque  $((-3, 1, 1, 1), (6, 2, -1, -2))$  est une famille libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires), on en déduit que  $\dim(H) \geq 2$ . De plus, puisque  $H \subset F \cap G$ , on a  $\dim(H) \leq 2$ . On a donc  $\dim(H) = 2$ . De plus,  $H \subset F \cap G$  et ces deux sous-espaces ont la même dimension. On en déduit que  $H = F \cap G$ .

---

**Correction de l'exercice 23 ▲**

Les vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas colinéaires. Ils forment une famille libre qui, par définition, engendre  $F$ . Ainsi  $(v_1, v_2)$  est une base de  $F$  et  $\dim(F) = 2$  (i.e.  $F$  est un plan vectoriel).

On vérifie que la famille  $(v_3, v_4, v_5)$  est liée en observant que  $v_3 = v_4 + v_5$ . D'autre part, la famille  $(v_4, v_5)$  est libre. On en déduit que  $(v_4, v_5)$  est une base de  $G$  qui est donc de dimension 2.

On a

$$\begin{aligned}F + G &= \text{vect}(v_1, v_2) + \text{vect}(v_3, v_4, v_5) \\ &= \text{vect}(v_1, v_2) + \text{vect}(v_4, v_5) \quad \text{car } v_3 = v_4 + v_5 \\ &= \text{vect}(v_1, v_2, v_4, v_5).\end{aligned}$$

La famille  $(v_1, v_2, v_4, v_5)$  ne peut pas être libre, puisque c'est une famille de 4 vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Mais on peut observer facilement que  $v_4 = v_2 - v_1$ . Ainsi,  $(v_1, v_2, v_5)$  reste une famille génératrice de  $F + G$ . On vérifie facilement qu'elle est libre. Elle forme donc une base de  $F + G$  qui est de dimension 3 et donc égal à  $\mathbb{R}^3$ .

Enfin, on a  $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 2 + 2 - 3 = 1$ . Or,  $v_4$  est dans  $G$  par définition et dans  $F$  car  $v_4 = v_2 - v_1$ , donc dans  $F \cap G$ . En particulier, il engendre  $F \cap G$  et en forme une base.

Si on n'avait pas observé que  $v_4$  est dans  $F \cap G$ , on pouvait aussi commencer par déterminer une équation de  $F$ . En effet,

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in F &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) = av_1 + bv_2 \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = a + 2b \\ y = b \\ z = a - b \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 3y + z \\ b = y \\ a = y + z \end{cases} \\ &\iff x - 3y - z = 0.\end{aligned}$$

Un élément  $(x, y, z)$  de  $F \cap G$  s'écrit alors  $cv_4 + dv_5 = (c, c + d, -2c + 3d)$  et vérifie  $x - 3y - z = 0$ , c'est-à-dire

$$c - 3(c + d) - (-2c + 3d) = 0 \iff d = 0.$$

On retrouve bien que  $(x, y, z) \in F \cap G \iff \exists c \in \mathbb{R}, (x, y, z) = cv_4$ .

---

### Correction de l'exercice 24 ▲

Il suffit de vérifier que la réunion d'une base de  $F$  et d'une base de  $G$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Il est ici très facile de déterminer des bases respectives de  $F$  et  $G$ . Pour  $F$ , une base est donnée par  $u_1 = (1, 1, 1)$ , pour  $G$ , une base est donnée par  $u_2 = (1, 1, 0)$  et  $u_3 = (1, 0, 1)$ . Or, il est aisé de vérifier que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est libre, et comme c'est une famille de trois vecteurs en dimension 3, c'est une base. Donc  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

---

### Correction de l'exercice 25 ▲

On commence par chercher une base de  $F$ . Soit  $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ . Alors, puisque  $P(0) = a$  et  $P'(0) = b$ , on a

$$P \in F \iff a = 0 \text{ et } b = 0 \iff P(X) = cX^2 + dX^3, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que  $(X^2, X^3)$  est une base de  $F$ . Puisque  $(1, X, X^2, X^3)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ , on obtient que  $G = \text{vect}(1, X)$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

---

### Correction de l'exercice 26 ▲

1. Soit  $(x, y, z, t) \in F \cap G$ . Alors d'une part on a

$$x + y + z + t = 0$$

et d'autre part, il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $(x, y, z, t) = (2a, -a, 0, a)$ . On introduit ceci dans l'équation précédente, et on trouve

$$2a - a + 0 + a = 0 \iff 2a = 0 \iff a = 0.$$

Ainsi,  $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$  et on a  $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$  donc  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

2. On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\} \\ &= \{(-y - z - t, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1) \mid y, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{vect}((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)). \end{aligned}$$

La famille  $(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)$  étant libre, c'est une base de  $F$  et on a  $\dim(F) = 3$ .

3. Par ailleurs, on a clairement  $\dim(G) = 1$  puisque  $G = \text{vect}(u)$  avec  $u = (2, -1, 0, 1)$ . Ainsi, avec la première question et le théorème des quatre dimensions, il vient

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3 + 1 - 0 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4).$$

Ainsi,  $F + G = \mathbb{R}^4$ ,  $F \cap G = \{0\}$ , donc  $F$  et  $G$  sont bien supplémentaires.

4. Posons  $u = (1, 2, 3, 4)$  et décomposons  $u$  en  $u_F + u_G$  avec  $u_F \in F$  et  $u_G \in G$  (on sait qu'une telle décomposition existe et est unique). Écrivons  $u_F = (x_0, y_0, z_0, t_0)$  avec  $x_0 + y_0 + z_0 + t_0 = 0$  et  $u_G = (2a, -a, 0, a)$  avec  $a \in \mathbb{R}$ . Puisque  $u_F + u_G = u$ , on obtient

$$\begin{cases} x_0 &= 1 - 2a \\ y_0 &= 2 + a \\ z_0 &= 3 \\ t_0 &= 4 - a. \end{cases}$$

De plus, la condition  $x_0 + y_0 + z_0 + t_0 = 0$  se traduit alors en

$$10 - 2a = 0 \iff a = 5.$$



Finalement, on trouve  $u_G = (10, -5, 0, 5)$  et  $u_F = (-9, 7, 3, -1)$ .

---

### Correction de l'exercice 27 ▲

---

1. Un élément  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  appartient à  $F$  si et seulement si

$$\begin{cases} x+2y+z = 0 \\ x+2y-z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $F$  est engendré par le vecteur  $(-2, 1, 0)$  qui est non-nul et qui constitue une base de  $F$  (en particulier,  $F$  est de dimension 1). D'autre part, un élément  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  appartient à  $G$  si et seulement si

$$\begin{cases} x = -y-2z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \iff (x, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-2, 0, 1).$$

Ainsi,  $G$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $(-1, 1, 0)$  et  $(-2, 0, 1)$  et comme ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils constituent une base de  $G$  qui est de dimension 2.

2. Pour démontrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires, on peut vérifier que la réunion de la base de  $F$  et de la base de  $G$  trouvées à la question précédente forme une base de  $\mathbb{R}^3$ . On peut aussi répondre aux deux questions en une seule étape, en démontrant que tout vecteur  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  s'écrit de manière unique  $a(-2, 1, 0) + b(-1, 1, 0) + c(-2, 0, 1)$ . Cette égalité conduit au système

$$\begin{cases} -2a-b-2c = x \\ a+b = y \\ c = z \end{cases}$$

dont l'unique solution est  $a = -x - y - 2z$ ,  $b = x + 2y + 2z$ ,  $c = z$ . Ceci prouve que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires et que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (-x - y - 2z)(-2, 1, 0) + (x + 2y + 2z)(-1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) \\ &= (2x + 2y + 4z, -x - y - 2z, 0) + (-x - 2y - 4z, x + 2y + 2z, z) \end{aligned}$$

avec  $(2x + 2y + 4z, -x - y - 2z, 0) \in F$  et  $(-x - 2y - 4z, x + 2y + 2z, z) \in G$ .

---

### Correction de l'exercice 28 ▲

---

1. On a  $v_3 = 3v_1 - v_2$ . Ainsi,  $F$  est engendré simplement par  $v_1$  et  $v_2$ . Comme  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas proportionnels, la famille  $(v_1, v_2)$  est libre. C'est une base de  $F$ .

2. On a  $w_3 = 5w_1 - 2w_2$ . Ainsi,  $G$  est engendré par  $w_1$  et  $w_2$ . De même, la famille  $(w_1, w_2)$ , qui est libre, forme une base de  $G$ .

3. On a  $v_1 - w_1 = v_2 - w_2$ , soit  $v_1 - v_2 - w_1 + w_2 = 0$ . Ainsi, la famille  $(v_1, v_2, w_1, w_2)$  est liée. On sait que  $(v_1, v_2, w_1, w_2)$  est une famille génératrice de  $F + G$ . Elle n'est pas libre donc ce n'est pas une base. Montrons en revanche que  $(v_1, v_2, w_1)$  est libre. En effet, si  $av_1 + bv_2 + cw_1 = 0$ , on obtient le système

$$\begin{cases} a+2b+c = 0 \\ 3a+7b+3c = 0 \\ -2a-5b = 0 \\ 2a+6b+2c = 0 \end{cases}$$

dont on montre facilement que la seule solution est  $a = b = c = 0$ . Ainsi,  $(v_1, v_2, w_1)$  engendre  $F + G$  (rappelons que  $w_2$  est combinaison linéaire de  $(v_1, v_2, w_1)$ ) et est une famille libre. C'est une base de  $F + G$  qui est donc de dimension 3.

4. On a

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \iff \begin{cases} x_1 = x_1 \times 1 \\ x_2 = x_2 \times 1 \\ x_3 = x_3 \times 1 \\ x_4 = x_1 \times (-4) + x_2 \times 2. \end{cases}$$

Une famille génératrice de  $E$  est donc donnée par  $((1, 0, 0, -4), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0))$ . On vérifie très facilement que cette famille est libre. C'est donc une base de  $E$ .

5. Remarquons que  $\dim(F + G) = \dim(E) = 3$ . Pour montrer que  $F + G = E$ , il suffit donc par exemple de démontrer que  $F + G \subset E$ . Et puisque  $F + G$  est engendré par  $v_1, v_2$  et  $w_1$ , il suffit de démontrer que ces trois vecteurs sont éléments de  $E$ . C'est une vérification immédiate. Remarquons qu'on a trouvé  $F + G = E$  même si les bases obtenues aux questions précédentes sont très différentes. La somme n'est pas directe, sinon on aurait  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$  ie  $3 = 2 + 2$ , ce qui n'est pas le cas. Par le théorème des quatre dimensions, on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

c'est-à-dire  $3 = 2 + 2 - \dim(F \cap G)$  qui donne  $\dim(F \cap G) = 1$ .

### Correction de l'exercice 29 ▲

1. On a :

$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} x+y = 0 \\ x+z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = 0 \\ y-z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = y \\ t = t \end{cases}$$

Une base de  $F$  est donc donnée par les deux vecteurs  $v_1 = (1, -1, -1, 0)$  et  $v_2 = (0, 0, 0, 1)$ .

2. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille  $(v_1, v_2)$  par deux vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de  $\mathbb{R}^4$ . On vérifie facilement que  $(v_1, v_2, e_1, e_2)$  est une famille libre, donc une base de  $\mathbb{R}^4$ .

3. L'équation  $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$  donne le système

$$\begin{cases} a+b-c = 0 \\ a+2b = 0 \\ a+3b-c = 0 \\ a+4b = 0 \end{cases}$$

ce qui donne facilement  $b = 0$  (comparer la deuxième et la quatrième équation), puis  $a = 0$  et  $c = 0$ . La famille est libre.

4. La famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est une famille génératrice de  $G$ . C'est aussi une famille libre d'après la question précédente. C'est donc une base de  $G$  qui est de dimension 3.

5. Soit  $au_1 + bu_2 + cu_3$  un vecteur de  $G$ . On cherche les conditions sur  $a, b, c$  pour qu'il soit élément de  $F$ . Il vient

$$\begin{cases} 2a+3b-c = 0 \\ 2a+4b-2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = -3b+c \\ b = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -c \\ b = c \\ c = c \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs de  $F$  et  $G$  sont ceux qui s'écrivent  $c(-u_1 + u_2 + u_3) = c(-1, 1, 1, 3)$ . Une base de  $F \cap G$  est donc donné par le seul vecteur  $(-1, 1, 1, 3)$ .

6. D'après le théorème des quatre dimensions,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Ainsi,  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  qui est de dimension 4, et donc  $F + G = \mathbb{R}^4$ .

7. Non, car  $F \cap G$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , la somme n'est pas directe.

### Correction de l'exercice 30 ▲

1. On a  $v_3 = v_1 + 2v_2$  donc la famille est liée.

2. Puisque  $v_3 = v_1 + 2v_2$ , on sait aussi que  $F = \text{vect}(v_1, v_2)$ . La famille  $(v_1, v_2)$  est une famille génératrice de  $F$ . C'est une famille libre puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc  $(v_1, v_2)$  est une base de  $F$  et  $\dim(F) = 2$ .

3. On écrit

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in F &\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) = \lambda v_1 + \mu v_2 \\ &\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\lambda + 2\mu \end{cases} \\ &\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \lambda = x \\ \mu = y \\ z = -x + 2y \end{cases} \\ &\iff x - 2y + z = 0.\end{aligned}$$

4. Il suffit de trouver un vecteur  $w$  tel que la famille  $(v_1, v_2, w)$  soit une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ . Par le théorème de la base incomplète, on peut le chercher dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$ . On vérifie facilement que  $e_3$  convient : si  $av_1 + bv_2 + ce_3 = 0$ , alors l'étude de la première coordonnée donne  $a = 0$ , celle de la seconde donne  $b = 0$ , d'où on déduit par la troisième coordonnée  $c = 0$ .

5. Le sous-espace vectoriel  $H = \text{vect}(w)$  est alors un supplémentaire de  $F$ .

6. On a

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in G &\iff x = -3y - 2z \\ &\iff \begin{cases} x = -3y - 2z \\ y = y \\ z = z \end{cases}\end{aligned}$$

On pose  $u_1 = (-3, 1, 0)$  et  $u_2 = (-2, 0, 1)$ . Alors  $(u_1, u_2)$  est une famille génératrice de  $G$  et c'est aussi une famille libre puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc  $(u_1, u_2)$  est une base de  $G$  qui est de dimension 2.

7. On a

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in F \cap G &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 5y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 7y \\ y = y \\ z = -5y \end{cases}\end{aligned}$$

Si on pose  $w = (7, 1, -5)$ , alors  $(w)$  est une famille génératrice de  $F \cap G$ , et c'est aussi une famille libre de  $F \cap G$  puisque c'est une famille constituée d'un unique vecteur non nul. C'est donc une base de  $F \cap G$  qui est de dimension 1.

8. Non, puisque  $F \cap G \neq \{0\}$ .

9. D'après le théorème des 4 dimensions,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3.$$

10.  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . De plus,  $\dim(F + G) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ . Ainsi,  $F + G = \mathbb{R}^3$ .

---

### Correction de l'exercice 31 ▲

Si c'était le cas, alors  $F$  et  $G$  seraient en somme directe, et on aurait

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = 3 + 3 = 6.$$

Or,  $F \oplus G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^5$ , il est de dimension au plus 5. C'est donc impossible !

---

### Correction de l'exercice 32 ▲

---

Tout repose sur la formule des quatre dimensions

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

et sur la propriété : si  $H$  est un sev de  $E$  tel que  $\dim(H) = \dim(E)$ , alors  $H = E$ .

Si 1. et 2. sont vraies, alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$$

tandis que  $E = F + G$  implique

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

3. est donc vérifié. Si 1. et 3. sont vraies, alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(E) - 0 = \dim(E).$$

Ainsi,  $F + G$  est un sev de  $E$  de même dimension que  $E$  :  $F + G = E$ . Si 2. et 3. sont vraies, alors

$$\dim(E) = \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(E) - \dim(F \cap G).$$

On en déduit que  $\dim(F \cap G) = 0$  et donc que  $F \cap G = \{0\}$ .

---

### Correction de l'exercice 33 ▲

1. Le résultat est évident si  $F = G$  et on peut donc supposer que  $F \neq G$ , auquel cas  $F \cap G = \{0\}$  puisque  $F$  et  $G$  sont de dimension 1. Soient  $f, g \in E$  tels que  $F = \text{vect}(f)$  et  $G = \text{vect}(g)$ . Dans ce cas, on peut écrire  $F + G$  sous les 3 formes suivantes :

$$\begin{aligned} F + G &= \text{vect}(f) + \text{vect}(g) \\ &= \text{vect}(Kf) + \text{vect}(f + g) \\ &= \text{vect}(Kg) + \text{vect}(f + g). \end{aligned}$$

En effet,  $f = f$  et  $g = (f + g) - f$ , ce qui prouve  $\text{vect}(f) + \text{vect}(g) \subset \text{vect}(f) + \text{vect}(f + g)$  tandis que l'inclusion réciproque est triviale. Il vient, d'après la propriété (i) de  $d$  :

$$d(F + G) = d(\text{vect}(f)) + d(\text{vect}((f + g))) = d(\text{vect}(g)) + d(\text{vect}((f + g))).$$

Ainsi, on en déduit  $d(\text{vect}(g)) = d(\text{vect}(f))$ , ce qui est le résultat recherché.

2. Remarquons d'abord que  $d(\{0\}) = 0$ , puisque  $d(\{0\}) = d(\{0\} + \{0\}) = d(\{0\}) + d(\{0\})$ . D'autre part, notons  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $d(F) = a$  lorsque  $\dim(F) = 1$ . L'existence d'un tel réel  $a$  est garanti par la question précédente. Prouvons alors par récurrence sur  $p \leq n$  que si  $F \in \mathcal{S}$ ,  $\dim(F) = p$ , alors  $d(F) = ap$ . C'est fait pour  $p = 1$ , et si le résultat est prouvé au rang  $p - 1$ , alors tout  $F \in \mathcal{S}$  avec  $\dim(F) = p$  s'écrit  $F = G \oplus H$ , avec  $\dim(G) = p - 1$  et  $\dim(H) = 1$ . Il vient :

$$d(F) = d(G) + d(H) = (p - 1)a + a.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que  $a = 1$ . Mais on sait que  $n = d(E) = na$ , ce qui entraîne bien que  $a = 1$ .

---